4.　高等学校数学の新しい授業の構想と展開

－数学的活動を目指した授業－

長崎　栄三

1. はじめに

高等学校の数学教育を改革しなければならないという気運は高まっている。しかしながら、なぜ、改革しなければならないのであろうか。過去には、現代数学の高校への導入という上からの要求で数学教育改革に走ったこともあった。しかし、現在は、高校生や高校の授業の状況に照らしての高校数学の再考という下からの改革が求められている。というのは、高校進学率が90％を越え、高校に入学してくる生徒の能力・興味・態度等にはすでに大きな差があるからである。少なくとも、全員が履修する「数学Ⅰ」においては、過去のように、一部の数学エリートを対象とした数学教育は成立しなくなっている。それでは、どのような数学教育を目指すべきなのであろうか。本論においては、まず、高校生の現状を概観し、次いで、現状の授業を分析し、このことを踏まえて、「数学Ⅰ」における新しい授業の構想と展開を考えてみたい。

2. 高校生の現状から見た数学教育

ここでは、国立教育研究所の特別研究として行われた「基礎学力」調査研究から明らかになった高校生の状況から論を進めることにする。基礎学力調査[1)]は、1992年２月～３月にわが国の10地域の標準的な高等学校19校を対象に行われ、高校１年生827名、数学科教師19名が参加したものである。この調査の結果、高校１年生に関しては、次のようなことが分かった。

(1)　知識・技能は身につけている

計算技能の習熟度の高さは過去から言われていることであり、それは数学を行う上で非常に大きな財産でもある。しかしこのことによって、ほかの大切な能力が見失われていないであろうか。次の３つの問題とその選択肢別反応率を例として挙げておく。下線が正答率。

①　２次方程式の解の公式

「次の２次方程式を解きます。

$2x^2+3x+4=0$

答えを、①～⑤の中から1つ選びなさい。

①　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{23}}{4}$

②　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{23}\,i}{4}$

③　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$

④　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}\,i}{4}$

⑤　①～④のどれでもない」

① 1％	<u>② 90％</u>	③ 1％	④ 1％	⑤ 7％

② 2次方程式の解の意味

「2つの解がα、βとなる x の2次方程式を、①～⑤の中から1つ選びなさい。

① $x^2-\alpha x+\beta=0$

② $x^2-\alpha\beta x+(\alpha+\beta)=0$

③ $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

④ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

⑤ $(x+\alpha)(x+\beta)=0$」

① 4％	② 3％	③14％	④74％	⑤ 4％

③ 2次方程式の立式

「縦の長さ45cm、横の長さ90cmの長方形のテーブルがあります。これに面積が2倍の長方形のテーブルクロスをかけて、縦も横も同じ長さだけ、下にたれるようにします。このとき、テーブルクロスの縦、横の長さを求めるのに用いる式を、①～⑤の中から1つ選びなさい。

① $2x^2=4050$

② $(x+45)(x+90)=4050$

③ $(x-45)(x-90)=4050$

④ $(2x-45)(2x-90)=8100$

⑤ $(2x+45)(2x+90)=8100$」

① 3％	②11％	③14％	④ 19％	⑤ 51％

これらの3つの問題は、いくつかの側面で性格が異なっているものである。①のような数学そのものの知識・技能にかかわる問題の正答率は高く、②のような数学の理解にかかわる問題や、③のような数学と具体的な場面を結び付ける問題の正答率は低くなる。このことは、①のタイプのような知識・技能の問題に私たちが力を注いでいるということの反映なのである。

(2) 授業では一人で考えるのが楽しい

社会に出てからも数学が必要とされる現在、数学にいつでも戻れるためには、高校の数学は楽しかったと思っていることが大切だと考えた。そこで、「あなたは、数学の授業で、どんなことをしているときが一番楽しいですか」と聞いてみた。それぞれの選択肢とそれらへの反応率は次の通りである。

①	先生の説明を聞いているとき	7％
②	一人で問題を考えているとき	28％
③	みんなで考え方を発表しあっているとき	9％
④	友達の説明を聞いているとき	7％
⑤	楽しいことはあまりない	49％

なお、楽しさについては、数学自身についても「数学は楽しいと思います」かと聞いている。

これについても、「そうです」9％、「だいたいそうです」21％であり、一方、「あまりそうではない」22％、「そうではない」16％となっており、同様な傾向を示している。楽しくないが、いずれも一番多い。

さらに、数学の楽しさでは、一人で問題を考えているときが一番多く、一方、話し合い等、生徒が参加する授業については評価されていない。最近の傾向である、数学を協同で学習することを推奨すること[2)]に反した結果となっている。

(3) 数学とは問題を解くこと

私たちは、生徒が単に数学の問題を解けるだけではなく、文化の中で数学が果たしている役割を正当に理解できることも期待している。そこで、数学にどのようなイメージを持っているのかは興味があるところである。それぞれのイメージに対する回答は5肢選択肢で求めたが、以下ではそのうち肯定的回答（「そうです」、「だいたいそうです」の和）の割合が高い順に生徒が持っているイメージを並べると次の通りである。

① 数学は、1つの問題について解き方や考え方がいろいろあるものです。 82％
② 数学は、いろいろな問題を解くことが勉強の中心です。 70％
③ 数学は、努力したことが報われる教科です。 67％
④ 数学は、答えが1つにはっきりと出てくるものです。 57％
⑤ 数学は、原理や関係を見いだすことが勉強の中心です。 41％
⑥ 数学は、規則でしばられた堅苦しい世界です。 40％
⑦ 数学は、自由な広がりをもった世界であると思います。 37％
⑧ 数学は、社会とは無関係な記号のゲームのようなものです。 27％
⑨ 数学は、社会的な問題の解決に役に立ちます。 17％
⑩ 数学は、いくらがんばっても楽しみがわいてこない教科です。 16％

数学は、問題を解くことが中心であり、答えは1つではあるが、解き方はいろいろとあり、努力が報われる、としている。一方で、数学は自由である、社会的な問題の解決に役立つには、回答が少ない。数学は、結局は、問題を解いているだけになってしまっているようであり、それ以上の数学の価値とは結び付いていない。数学が、個々の生徒にとって10年間もの長い間、カリキュラムの中心を担っているのは、決して、「数学とは問題を解くことである」という意識を持たせることではないはずである。

私たちは、今、私たちの数学科の授業を振り返って見ることが求められている。

3. 高校の授業の現状から見た数学教育

私たちが行ってきた数学教育によって生徒にはいろいろな問題点があることが分かった。そこで、改めて、高校の数学科の授業の現状を見ておこう。

(1) 数学科の授業は一斉授業

授業は、一般に、一斉指導、グループ指導、個別学習などで行われる。前章の国立教育研究所の調査では、高校の数学教師19名にそれぞれの授業形態を取っている割合を百分率で聞いて

いるが、その平均は、次の通りである。

一斉指導	89%
個別学習	7%
グループ指導	0%

このように、高校の数学科のほとんどの授業は、一斉指導である。

(2) 授業とは階段を上がるようなもの

授業はほとんどが一斉指導であるが、それでは、その授業はどのような性格のものなのであろうか。高校の数学教師の授業観を「授業のたとえ」として112名の教師に聞いた[3)]。それぞれのたとえ（～のようなもの）に対する回答は5肢選択肢で求めたが、そのうち肯定的回答（「その通り」、「大体その通り」の和）の割合が高い順に、それらを並べると次の通りである。

①	上へあがっていく階段	67%
②	建物の土台	66%
③	おもしろい推理小説	52%
④	いろいろな形が作れる粘土	46%
⑤	わき出る泉	33%
⑥	整然とした行進	29%
⑦	絵画や音楽を鑑賞する	26%
⑧	筋書きのないドラマ	15%
⑨	お祭りの御神輿	2%

数学の授業は、生徒が参加して数学を作り出していくというよりも、すでに出来上がった数学を生徒が理解するために階段を上ったり地道に土台から作り上げたりしていくようなものである。

(3) 数学的な考え方が分かる教科書を望む

一般に、授業では教科書は大きな役割を演じる。高校の数学科ではどうであろうか。前節と同じ教師112名に聞いた結果、そのうちの93%が「よく使う」と答え、3%が「ときどき使う」と答えている。高校の数学科でも教科書は広く利用されている。

それでは、どのような教科書を望んでいるのであろうか。さらに14の項目について重要性を聞いたが、そのうち「非常に重要」と答えた割合が高い2項目を高い順にあげる。なお、特徴を明確にするために、小中高校すべての場合をあげておく。

小学校教師（143名）

1	興味・関心を引く	50%
2	多様な個性に応じる	38%

中学校数学科教師（93名）

1	興味・関心を引く	53%
2	多様な個性に応じる	38%

高等学校数学科教師（112名）

1　数学的な考え方が分かる　41%

2　興味・関心を引く　28%

小中学校の教師が、子どもの立場から教科書を見ているのに対して、高校の教師は数学の立場から教科書を見ている。ところで、この数学的な考え方は、わが国では、純粋数学の問題の系列に見いだされることが多い。

(4)　教科書は単元の導入でも使う

それでは、その教科書の利用の仕方について、さらに聞いてみた。それぞれの利用の仕方（〜とき）に対する回答は５肢選択肢で求めたが、以下ではそのうち肯定的回答（「必ず使う」、「よく使う」の和）の割合が高い順に利用の仕方を並べると次の通りである。

①	復習をさせる	79%
②	単元の導入をする	76%
③	計算手順や説明の仕方を例で説明する	75%
④	知識・技能を身につけさせる	69%
⑤	予習をさせる	69%
⑥	法則や性質をまとめさせる	65%
⑦	法則や性質を発見させる	47%
⑧	問題をさらに発展させる	45%

同時に行われた小中学校の教師と比べても、高校の数学科では広範囲の利用の仕方がなされているが、発見や発展ではあまり多くは使われていない。このうちで、着目したいのは、「単元の導入」である。単元の導入とは、単元の目標を明らかにし、学習の必要感を理解させるということで、単元の指導全体を左右するものであるが[4)]、その場面で教科書が多く使われているのである。

(5)　概念の説明で授業は始まる

高校の数学科では教科書が広範囲で利用され、しかも、単元の導入部でも多くの教師に利用されている。そこで、教科書の導入部の特徴を、三角比に例を取りながら調べて見よう。ここでは、現行の数学Ⅰの教科書23種をすべて分析の対象とした。

教科書における三角比の導入のパターンを見ると、正接の定義が終わると、その後は、どれも、練習、例題、問という流れになっている。そこで、正接の定義が行われるまでの扱いで、次の７つに分けた。なお、以下の利用場面とは、三角比が使われたり見いだされる具体的な場面であり、木の高さを測ることが一番多く10種類あり、鉄塔の高さを測ることが２種類、そして、崖の高さを測ること、川幅を測ることが１種類ずつある。また、斜面を転がる鉄球の水平・垂直方向、屋根の梁の形から相似な三角形を見いださせるものが１種類ずつある。それぞれのパターンは、次の通りである。

①	ほとんど直接に定義	３種
②	中学校の相似を想起させて定義	４種

③　利用場面を説明して定義　3種
④　利用場面で解決の仕方を見せて定義　7種
⑤　利用場面で生徒に問題を解かせて定義　3種
⑥　利用場面で解決の仕方を見せて生徒に類似の問題を解かせて定義　2種
⑦　利用場面を説明して定義に関連した問題を生徒に解かせて定義　1種

半数以上の教科書が、なんらかの説明をしただけで定義に入っており、一方、生徒が問題を解いたあとで定義に入っているのは6種あるが、それでも扱われている問題は1～2題しかない。いずれにしても、正接は、なんらかの問題を自分で解いて納得した後で定義されるというよりも、そのような問題に先立って定義される。つまり、概念の説明から始まるという、大学の多くの教科書に近い形である。結局、このような教科書で授業が始まるのであるから、授業は、概念の説明から始まることになる。

4.　数学的活動を中心においた授業の構想

今までの高校の数学科の授業は、その多くは、教科書を中心とした説明型の授業であり、それは、出来上がった数学の概念の理解を一つずつ積み重ねていく作業でもあった。生徒にとっては、教科書で与えられた純粋数学の問題を、例題の説明に沿いながら一つずつ解いていくことになっていた。数学的な筋道の上からは必要な準備はすべて教科書に埋め込まれており、生徒の興味・関心とはあまり関係はなく、その通りにやっていけば、いつしか高校数学の頂上に達することが可能にはなっていた。

しかし、結局、多くの生徒は、このようにして学習することによって、数学に関心を失い、そして、数学では自分にとって無意味な問題をただただ解いているという感情を持つようになってしまったようだ。

そこで、ここでは、このような出来上がった数学を学んでいくという受け身的な立場ではなく、生徒が主体的に問題に取り組む中で自分の数学を作り上げていくという活動的な立場をとることにする。そのときの数学科の授業で目指す活動を「数学的活動」と呼ぶことにする。

(1)　数学的活動の重視

数学的活動とは、「既成の数学の理論を理解しようとして考えたり、数学の問題を解こうとして考えたり、あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり、数学を何かに応用して、数学外の問題を解決しようとしたりする、数学に関係した思考活動」を一括したものであり、それは、現実の世界と数学の世界とのかかわりあいのうえで捉えられるものである[5)]。つまり、数学科での活動を、計算することや証明することだけではなく、より広く、しかも、より実体に則して捉えようとするものであり、数学の概念を教師が説明することによって理解させるのではなく、生徒の主体的ないろいろな活動を通して理解させようとするものである。

(2)　数学的活動を目指した教科書

このような数学的活動を正面から捉えようとすると、数学的活動が可能となる問題場面をどのように構成するのかということが指導の鍵となる。ここで、その具体像を見るために、数学

的活動を、注意深く工夫された問題の系列を通して可能にしようと試みた教科書の例をあげることにする。この教科書では、数学内外の具体的な問題の解決を通して、目標とする数学の必要性と概念化に達し、その後は、その数学を使ってさらに数学内外の具体的な問題を解決するという一連の問題解決活動から各章が構成されている。以下に、少々長いが、「正接」の部分をすべてあげることにする[6]。ただし、図や写真など多くの図的表現はすべて略してある。

……………………………………………………………………………

§1.　正　　接

陽が当たっているとき、長さの分かっている棒を鉛直に立てて影を測り、次に木などの影を測れば、その高さを知ることができる。

問1.　長さ1.5mの棒の影が2.4mあるとき、8mの影を映す木の高さはどれほどか。また、amの影を映す木の高さをbmとして、aからbを求める式を書け。

問2.　問1で知った影の長さから、木の高さを出す方法の正しい理由を述べよ。棒を立てる代わりに太陽の仰角を測っても影の長さから物の高さを知ることができる。

問3.　太陽の仰角が35°のとき、影の長さがaである物の高さbを求める式を書け。同様に仰角が15°、30°、45°、60°、75°のときの式を書け。

物の高さを出すとき、影の長さに掛ける数は、太陽の仰角によってきまる。仰角が変われば、掛ける数もまた変わる。この変化の仕方を調べてみよう。

問4.　太陽の仰角が0°から90°まで変わるとき、影の長さに掛ける数はどのように変わるか。これをグラフで示せ。

太陽の仰角がαのとき、影の長さに掛ける数を角aの正接と言い、次の記号で表す。

$$\tan\alpha$$

影の長さをa、高さをbとすれば、

$$b = \tan\alpha \quad 故に \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

となる。

一つの角がαの直角三角形を前の図のように書けば、前の式から、角αの正接は高さを底辺で割った商とみることができる。

問5.　$\tan 30°$、$\tan 45°$、$\tan 60°$の値を求めよ。

問6.　角αが75°を超えて80°、85°と増して行ったら、$\tan\alpha$の値はどんな変わり方をするか考えよ。

………………………………∞………………………………

1．身長140cmの人の影が3mのとき、ある銅像の影は16mであった。銅像の高さはどれくらいか。

2．12.40m離れた所から旗ざおの仰角を測ったら、23°であった。眼の高さは1.12mである。旗ざおの高さを計算せよ。

3．川の両岸に向かいあって渡し場がある。一方の渡し場から岸に沿って100m進んだ所で、対岸の渡し場が岸と70°の方向に見えた。川幅はどれくらいか。

4．信越線で、勾配の最も急な所は67である。この数は水平距離1000に対する高さの差を表している。この線路の傾きの角はおよそ何度か。

5．屋根の勾配は、昔、3寸勾配、4寸勾配などといった。3寸、4寸というのは、水平距離1尺に対する高さの差である。3寸勾配の屋根の傾きはおよそ何度か。

6．ある石段の踏面は40cm、蹴上は17cmである。この石段の傾きはおよそ何度か。

7．丘の高さを測るのに、一地点で仰角を測り、次に、丘に向かって100m進んで、ふたたび仰角を測って、18°と33°とを得た。丘の高さを求めよ。

8．$y=3x-7$のグラフは、x軸に対して、どれ程傾いているか。ただし、両軸の目盛りは同じとする。

9．晴れた日に1時間おきに棒の影の長さを測って、時刻と太陽の仰角との関係を示すグラフを作れ。

10．角αが0°から90°まで変わる間の$\tan\alpha$のグラフを作れ。

11．仰角が0°から90°まで変わる間に、長さ1mの棒の影はどう変わるか。これをグラフで示せ。また、このグラフと前問で作ったグラフとを調べよ。

………………………………………………………………

この教科書では、このように、問（1～6）や問題（1～11）を解く中で、自然と正接の考えが身につくようにと工夫されている。もちろん、この教科書に対しては、数学の理論的な記述や説明が欠けているという批判が数学者から出されたが、問題を解きながら、生徒が自分で正接の概念を作っていくという趣旨は理解できるであろう。

(3) 数学的活動を中心にした授業の鍵

数学的活動を中心にした授業では、1つの大きな問題に取り組んだり、また、前述の教科書のように異なる問題系列に取り組んだりすることで、学習の場が作られるが、そこでは、どのような点を考慮したらよいのであろうか。次に、鍵となりそうなことをいくつか挙げてみよう。

① 数学を学習する目的を問い続ける

数学的活動とは、あくまでも、生徒の主体的な活動である。生徒が自分で学習の目的を持ち、興味・関心を持って取り組むことが必要になる。教師にとっては、生徒が学習する必要性に疑問を持ったとき、入試のためではない答えを、いつでも答えることができるようにしておきたい。

② いろいろなタイプの問題を扱う

現在の数学科教科書の問題は、多くの場合、その数学的な内容に結び付いた純粋数学の問題である。しかし、数学的活動では、当然もっと広範囲の問題が対象となる。純粋数学の内容に加え、例えば、場面が生徒に親しみやすくなった具体的な問題、数学の社会的有用性が納得できるような実世界の問題、楽しみながら考えるパズル・ゲームなどの問題、数学の歴史を学ぶ数学史にかかわる問題などである。特に、実世界の問題はできるだけ工夫したいし、また、数学史については、数学の文化的な意義について学ぶ上で、もっと重視すべきであろう[6)]。

③ いろいろな数学的方法に目を向ける

現在の高校数学の授業の中の数学的方法では、計算をすることや証明することが主な方法であろう。それに加え、問題を見いだすこと、問題を作り出すこと、モデル化すること、パターンを見いだすこと、仮定を検証すること、一般化すること、数学を応用することなどなど、い

ろいろな数学的な方法に目を向けたい。特に、学んだ数学を興味ある問題に応用することは、その興味ある問題の解が分かるとともに、学んだ数学の理解が深まり、あわせて、数学のよさを感得することに結び付くであろう。

④　目的に応じて道具を利用する

数学は頭と紙と鉛筆でするものという信念があるようである。しかし、例えば現実的な数値を処理したり、グラフを扱うときにはグラフ電卓が有効であるし、図形の変換などでは、コンピュータが有効である。大切なことは、数学を使って問題を解くことであり、また、数学を理解することなどであるのだから、それに有効な道具は利用したい。

⑤　話し合いを取り入れる

わが国の授業では、小学校では児童はよく発言するが、中学校になるとそれが減少し、高校ではほとんどなくなるようである。しかし、このことは数学やその他の諸学問の特性ではなく、あくまでも講義式授業の副作用であろう。数学的活動は、話し合いながら、相互の理解をさらに深めていく経験を通して、さらに質の高いものとなろう。

(4)　教師の意識の変革

今までに触れてきたように、数学的活動を目指す場合には、教師と生徒の関係を再考する必要が生じる。教師が、数学の授業の在り方を変えなければならなくなる。というのは、数学的活動とは、本来的に、生徒の自主的な活動の上に成立するからである。教師の最大の仕事は、教壇で例題、説明、演習を繰り返すことではなく、生徒が自ら活動したり、考えたりする学習の場を設定することになる。数学を単に伝達したり教え込んだりするのではなく、生徒ともに数学を創りあげていくのである。このことは、今まで以上に教師に多くのことを要求することになる。教師は、適切な課題を見いだし、生徒が自主的に考えるような指導を工夫し、そして、生徒が迷ったときには適切な助言をすることが求められるのである。高校数学の教育化と言ってもよいであろう。

5.　おわりに

数学的活動を、本論においては、現実世界と数学世界とのかかわりを念頭に置いて考えてきた。もちろん、数学的活動とはこれだけに限られる訳ではなく、数学世界の中での活動も考えられる。実際、多くの数学教師はそのような純粋数学のすばらしさに憧れて数学を目指したのであろう。そして、多分、今までの高校の数学教育は、このような数学世界の中だけの数学的活動に限られていたといっても過言ではないであろう。もちろん、数学を主として学習する生徒には、そのような方向が重要な意味をもってくる。しかし、高校生全員を対象とする数学教育では、まず、数学的活動の対象範囲を広げようというのである。

ところで、本論の最初で生徒は「知識・技能は身につけている」と述べたが、このことと、数学的活動を重視しよう、数学を楽しくしよう、数学を使えるようにしよう、数学の考え方を学ぼうということは、背反するものではないことを改めて強調しておきたい。数学においては、基本的計算があらゆる場面でものをいい、また、基本的計算の遂行には当然数学的な考え方が含まれているからである。

数学の問題が解けることは大きな喜びである。しかし、その問題がどのような背景のなかにあるのか、どのようなことにつながっているのか、そのようなことが見えるようになることの喜びはさらに大きい。数学的活動を通して得られるそのような喜びを、数学を主として学ぶ生徒だけではなく、数学を高校1年生で終えてしまう生徒にも味合わせたいものである。

注および引用・参考文献

1）国立教育研究所編．1993．『特別研究　「基礎学力」調査報告書－第二年次報告書（平成3年度調査）－』．国立教育研究所．224p．長崎栄三・瀬沼花子．1994．「算数・数学」『国立教育研究所紀要』第123集．pp.53－104．

国立教育研究所「基礎学力調査」の国立教育研究所外の数学科研究委員は次の通りである．川上純（千葉県立船橋古和釜高等学校），菊地勇（昭和第一高等学校），佐藤公作（東京都立東大和高等学校），竹谷勝（文部省），茂木勇（文教大学）．肩書は当時．この調査研究では，数学の基礎学力を，行動類型（知識，理解，思考，技能，態度），数学内容（数式，図形，関係），数学過程（数学化，数学的処理，数学的検証）の3次元11領域をもって分析的に考察した．

2）The Mathematical Association. 1995. “Why, What, How, Some Basic Questions for Mathematics Teaching”, p. 9.

3）岡本光司・長崎栄三．1994『「学習材」としての教科書の機能に関する基礎的研究「教科書に関する調査」調査結果報告書Ⅲ．算数・数学．教科書研究センター．147p．

4）半田進編著．1995．『考えさせる授業 算数・数学 実践編』．東京書籍．pp. 21－22．

5）島田茂編著．1995．『新訂　算数・数学科のオープンエンドアプローチ』．東洋館出版．pp. 14－18．

6）中等学校教科書株式会社．1943,『数学2第二類』．中等学校教科書株式会社．pp.38－42，を現代仮名遣い直したもの．その意義については次の論文を参照．長崎栄三．1990．「数学第一類・第二類の検定教科書の編纂とその思想」『国立教育研究所研究集録』．第21号．pp. 43－56．

7）片野善一郎．1995．『数学史の利用』．共立出版．195p．